ОТЧЕТ ЗА 2023 ГОД

О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПО ГРАНТУ ФОНДА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ»

(конкурс 2020 года)

КРИВОШЕЕВА ОЛЕСЯ АЛЕКСАНДРОВНА

I. Результаты, полученные в 2023 году

1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ − последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty,\ k \to \infty$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad (1)$$

Пусть $d = \{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ и $g_{d,\Lambda}$ − сумма ряда (1). Символом $\mathcal{D}(\Lambda, d)$ обозначим «область сходимости» ряда (1). Другими словами, $\mathcal{D}(\Lambda, d)$ − открытое ядро множества всех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых сходится ряд (1) (он сходится в каждой точке «области» $\mathcal{D}(\Lambda, d)$ и расходится в каждой точке ее внешности).

Пусть $\mathcal{D}$ − выпуклая область и $\mathbb{A}(\Lambda, \mathcal{D})$ − множество всех последовательностей $d = \{d_{k,n}\}$ коэффициентов ряда (1), при которых он сходится равномерно на компактах в области $\mathcal{D}$, и его область сходимости $\mathcal{D}(\Lambda, d)$ совпадает с $\mathcal{D}$.

Были изучены условия, при которых для любой последовательности коэффициентов $d \in \mathbb{A}(\Lambda, \mathcal{D})$ область существования функции $g_{\Lambda,d}$ совпадает с областью сходимости $\mathcal{D}(\Lambda, d) = \mathcal{D}$ ряда (1). Также рассматривались последовательности Λ, имеющие угловую плотность (измеримые) и нулевой индекс конденсации $\mathcal{S}_\Lambda$ (индекс конденсации А.С. Кривошеева, впервые был введен в работе [1]). Были получены различные критерии, связанные с распределением особых точек суммы ряда (1) на границе его области сходимости. В частности, в классе указанных последовательностей был получен критерий того, что все граничные точки области $\mathcal{D}$ являются особыми для любой функции $g_{\Lambda,d}$ такой, что $d \in \mathbb{A}(\Lambda, \mathcal{D})$. Критерии сформулированы при помощи простых геометрических характеристик последовательности Λ и области $\mathcal{D}$ (угловая плотность и длина дуги границы $\partial\mathcal{D}$).

Показано также, что условие равенства нулю индекса конденсации $\mathcal{S}_\Lambda$ является существенным. Доказано, что в случае, когда область существования каждой функции $g_{\Lambda,d}$, $d \in \mathbb{A}(\Lambda, \mathcal{D})$, совпадает с областью $\mathcal{D}$, в любом угле есть луч такой, что часть последовательности Λ, которая сосредоточена в некотором смысле вдоль этого луча, имеет нулевой индекс конденсации.

2. Пусть f − целая функция экспоненциального типа в комплексной плоскости, т.е.

$$\sigma_f = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r} < \infty, \qquad M_f(r) = \max_{|z|\le r} |f(z)|,$$

Функция

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|}{r}, \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

называется индикатором f. Говорят ([1], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r\notin E, r\to+\infty} \frac{\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|}{r^{\rho(r)}}, \quad \varphi \in [0,2\pi],$$

где $E \subset (0,+\infty) -$ множество нулевой относительной меры (E_0-множество), т.е.

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{mes}\left(E \cap (0,r)\right)}{r} = 0$$

(символ mes обозначает лебегову меру множества).

Классический результат Б.Я. Левина ([2], гл.II, теорема 2 и гл. III, теорема 4) утверждает, что f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является правильно распределенным. При этом выполнено равенство

$$\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C}\backslash B_f, \qquad \alpha(r)/r \to 0, r \to \infty, \tag{2}$$

где $B_f - C_0$-множество, т.е. может быть покрыто кругами $B\left(z_j, r_j\right)$, $j \geq 1$, такими, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \sum_{|z_j|\leq r} r_j = 0.$$

Автор книги [2] отмечает, что исключительное множество B_f строится неконструктивно. Доказывается лишь, что оно существует. В одном частном случае в [2] удается построить простое исключительное множество. С этой целью в книге [2] вводится понятие регулярного множества $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Это простое (т.е. $n_k \equiv 1$) правильно распределенное множество, для которого круги специальных радиусов с центрами в точках λ_k попарно не пересекаются. В случае, когда $\Lambda_f -$ регулярное множество, верно (2), где B_f является объединением указанных кругов.

В работе [2] вводится понятие правильно сбалансированного кратного множества $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Это правильно распределенное множество с нулевым индексом конденсации $\mathcal{S}_\Lambda$. В [3] доказывается, что регулярное множество является частным случаем правильно сбалансированного множества. Более того, доказывается, что правильная сбалансированность множества Λ_f является необходимым и достаточным условием для того, чтобы в равенстве (2) исключительное множество B_f состояло из попарно непересекающихся кругов относительно малых радиусов.

В совместной работе с Кривошеевым А.С. (Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Исключительные множества.* Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69, № 2. С. 289-305) было конструктивно построено простое исключительное множество B_f, которое фигурирует в равенстве (2), в форме удобной для его применения. Также конструктивно было построено разбиение нулевого множества Λ_f на относительно малые группы так, что групповой индекс конденсации $\mathcal{S}_\Lambda(U)$, введенный в работах [4] и [5], равнялся нулю. В работе [5] по всем таким разбиениям строится базис в инвариантном относительно оператора дифференцирования подпространстве аналитических функций в выпуклой области комплексной плоскости. При этом в [5] подобные разбиения не строятся, а лишь доказывается, что они существуют.

Также была получена оценка (2) для функции вполне регулярного роста вне исключительных множеств B_f. Были построены базисы в инвариантном подпространстве аналитических функций в выпуклой области. Они состоят из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций (экспоненциальных мономов) оператора дифференцирования, разбитых на относительно малые группы.

3. Пусть $D \subset \mathbb{C}-$ выпуклая область и $H(D)-$ пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах из D. Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы

$$\mathcal{E}(\Lambda)=\{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Если система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным $(\neq H(D),\{0\})$ замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)-$ это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$, а $\Lambda-$ его кратный спектр. Пусть $W \subset H(D)-$ нетривиальное замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda=\{\lambda_k, n_k\}-$ его кратный спектр (последовательность Λ та же, что и в п. **1**). Основной задачей в теории инвариантных подпространств является представление всех его функций при помощи собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования $-$ $z^n e^{\lambda_k z}$. Задача представления функций $g \in W$ посредством рядов по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т.е. рядов вида (1) называется проблемой фундаментального принципа для инвариантного подпространства.

Исследование проблемы фундаментального принципа имеет богатую историю. Частично она отражена в работе [1]. Полное решение проблемы фундаментального принципа в случае ограниченной выпуклой области D получено в работах [5]-[7]. Доказывается, что каждая функция $g \in W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области D тогда и только тогда, когда $S_\Lambda=0$ и

$$\overline{n}_0\big(\Lambda(\varphi_1,\varphi_2)\big) \leq \frac{\Upsilon_D(-\varphi_2,-\varphi_1)}{2\pi}, \quad \varphi_1,\varphi_2 \notin \Phi(\Lambda), \quad 0<\varphi_2-\varphi_1<\pi. \tag{3}$$

Здесь $\overline{n}_0(\Lambda)-$ максимальная плотность Λ, $\Phi(\Lambda)-$ некоторое не более чем счетное множество, $\Lambda(\varphi_1,\varphi_2)-$ последовательность, состоящая из всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле

$$\Gamma(\varphi_1,\varphi_2)=\big\{z=te^{i\varphi}: \varphi \in (\varphi_1,\varphi_2), t>0\big\},$$

$\Upsilon_D(\varphi_1,\varphi_2)-$ длина дуги области D. Она соединяет точки касания опорных прямых

$$L(-\varphi_2, D)=\big\{z: \mathrm{Re}\big(ze^{i\varphi_2}\big)=H(-\varphi_2,D)\big\}, \qquad L(-\varphi_1,D)=\big\{z: \mathrm{Re}\big(ze^{i\varphi_1}\big)=H(-\varphi_1,D)\big\}$$

с границей ∂D, где $H(\varphi, D)-$ опорная функция области D.

В работе [8] получен критерий представления (1) в случае, когда $D=\mathbb{C}$. Для такого представления необходимо и достаточно неравенство $S_\Lambda<\infty$. Случай, когда область D является полуплоскостью, изучен в работах [9] и [10]. Критерий представления формулируется только при помощи индекса S_Λ. В работе [11] получено полное решение проблемы фундаментального принципа в случае, когда $\Theta(\Lambda)$ не содержит внутренних точек множества, где ограничена опорная функция области D. Здесь $\Theta(\Lambda)-$ совокупность пределов всех сходящихся последовательностей вида $\Big\{\overline{\lambda}_{k_j}\big/\big|\lambda_{k_j}\big|\Big\}_{j=1}^{\infty}$. Это решение также формулируется лишь при помощи индекса S_Λ.

В работе 2023 года (Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Необходимое условие выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в* *неограниченной выпуклой области.* Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15, № 3. С. 71-81) были рассмотрены произвольные выпуклые области D и доказано, что неравенство (3) необходимо для представления (1) при любых $\varphi_1, \varphi_2 \notin \Phi(\Lambda)$ таких, что дуга $\{e^{i\varphi}: \varphi \in [-\varphi_2, -\varphi_1]\}$ лежит внутри множества, где ограничена функция $H(\varphi, D)$.

Список литературы.

1. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях.* Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71-136.
2. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат. 1956.
3. Кривошеева О. А., Кривошеев А. С., Рафиков А.И. Оценки снизу целых функций. Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. №3. С. 46–62.
4. А.С. Кривошеев. Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов. Уфимский математический журнал. 2012. Т.4. №1. С. 88-106.
5. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций. Математический сборник. 2013. Т.204. №12. С.49-104.
6. О.А. Кривошеева, А.С. Кривошеев. Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости. Функц. анализ и его прил. 2012. Т.46, №4. С. 14–30.
7. А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева. Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве. Матем. заметки. 2016. Т.99, №5. С. 684–697.
8. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. Базис в инвариантном подпространстве целых функций // Алгебра и анализ. – 2015. – Т.27, №2. – С. 132–195.
9. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром // Алгебра и анализ – 2017. – Т.29, №4. – С. 82–139.
10. А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева. Инвариантные подпространства в полуплоскости. Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12. №3. С. 30–44.
11. A. S. Krivosheev, O. A. Krivosheeva. Invariant subspaces in unbounded domains. Пробл. анал. Issues Anal. 2021. V. 10(28). №:3. P. 91–107.

II. Опубликованные работы.

Научные статьи

1. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Область существования суммы ряда экспоненциальных мономов.* Математические заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 563-578.
2. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Исключительные множества.* Современная математика. Фундаментальные направления. 2023. Т. 69, № 2. С. 289-305.
3. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Необходимое условие выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в неограниченной выпуклой области.* Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15, № 3. С. 71-81.
4. Kuzhaev A.F., Krivosheeva O.A. *On the Representation by Series of Exponential Monomials with Almost Real Exponents.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1892-1907.

III. Участие в конференциях и школах.

1. «Аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов». Международная конференция. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 27 января – 1 февраля 2023 г.
2. Член организационного комитета международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2023». Уфа, 4-8 октября 2023 г. Член редколлегии тома 1 сборника материалов международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2023» (секции «Спектральная теория операторов», «Комплексный и функциональный анализ», «Нелинейные уравнения»).
3. Заместитель председателя организационного комитета XIV Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», посвященной 75-летнему юбилею профессоров Я.Т. Султанаева и М.Х. Харрасова. Уфа, 8-11 октября 2023 г. Пленарный доклад «К 75-летию д.ф.-м.н., профессора Султанаева Яудата Талгатовича».

IV. Педагогическая деятельность.

1. Чтение лекций и проведение практических занятий по дисциплине «Математический анализ» для студентов 1 курса Института информатики, математики и робототехники.
2. Под моим руководством 2 октября 2023 г. старшим преподавателем кафедры математического анализа института информатики, математики и робототехники Кужаевым Арсеном Фанилевичем была успешно защищена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ на тему «Представление функций рядами экспоненциальных мономов» в диссертационном совете 99.0.110.02, созданном на базе ФГБНУ Уфимский исследовательский федеральный центр Российской академии наук и ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий».
3. Под моим руководством защищена выпускная квалификационная работа магистра (Исмагилова Р.А.).
4. Председатель жюри Объединенной межвузовской математической олимпиады школьников по математике 2023 года (площадка в г. Уфе, 5 февраля 2023 г.).

V. Отчет за 2021-2023 гг.

За время реализации гранта фонда «Молодая математика России» были достигнуты все заявленные в плане исследований результаты. Перечислим основные.

(последовательность Λ введена в самом начале)

1) Был получен критерий представления произвольной функции $g \in W(\Lambda, D)$ рядом экспоненциальных мономов (1), который сходится во всей плоскости. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий: конечность индекса конденсации S_Λ и $\Xi(\Lambda) \subseteq J(D)$ ($\Xi(\Lambda) -$ множество пределов сходящихся последовательностей $\left\{\bar{\lambda}_{k_j}/\left|\lambda_{k_j}\right|\right\}_{j=1}^{\infty}$, $J(D) = \left\{e^{i\varphi} \in S(0,1): H_D(\varphi) = +\infty\right\}$, $S(0,1) -$ единичная окружность с центром в нуле, $H_D(\varphi) -$ опорная функция выпуклой области D). Чуть позже удалось обобщить этот

результат, распространив его на случай когда $\Xi(\Lambda)$ лежит в замыкании $\overline{J(D)}$ множества $J(D)$.

2) Были изучены условия на последовательность показателей при которых область существования суммы ряда (1) совпадает с его областью сходимости (т.е. сумма ряда аналитически не продолжается за пределы области сходимости).

3) Был получен критерий того, когда из последовательности Λ_2 можно выделить измеримое множество Λ с заданной угловой плотностью при порядке $\rho(r)$, содержащее заданную подпоследовательность Λ_1 последовательности Λ_2. Также были получены условия, при которых из последовательности $\Lambda_2 \supseteq \Lambda_1$ можно выделить правильно распределенное множество Λ с заданной угловой плотностью при порядке $\rho(r)$, содержащее Λ_1.

4) В моей работе[1] 2011 года при условиях

$$m(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_k|} = 0, \quad \text{и} \quad \sigma(\Lambda) = \varlimsup_{j\to\infty} \frac{\ln j}{|\xi_j|} = 0,$$

где $\{\xi_j\}$ – неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз, приводится полный аналог теоремы Абеля для рядов (1) и в частности, для рядов экспонент. Показывается, что областью сходимости ряда (1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1) в этой области эквивалентна его абсолютной сходимости, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии. Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара.

Недостатком данной работы является условие $m(\Lambda) = 0$, которое хорошо подходит лишь для случая ограниченной области сходимости ряда (1). В случае, когда эта область неограниченна, условие $m(\Lambda) = 0$ становится слишком жестким. Были получены результаты, аналогичные результатам работы 2011 года при более слабом (в случае неограниченной области) ограничении на кратности n_k точек λ_k.

5) Была исследована проблема полноты системы экспоненциальных мономов с положительными показателями в пространстве функций аналитических в выпуклой области комплексной плоскости. Были получены достаточные условия полноты этой системы. Они сформулированы при помощи простых геометрических характеристик области и последовательности (вертикальный диаметр и логарифмическая плотность). Также получен критерий полноты такой системы в произвольной выпуклой области при условии совпадения верхней и максимальной плотностей последовательности. Этот результат обобщает известный результат Б.Я. Левина и А.Ф. Леонтьева для измеримых положительных последовательностей. При его доказательстве использовалась теорема единственности для целых функций экспоненциального типа, доказанная в этой же работе. Полученная теорема единственности обобщает соответствующие результаты Ф. Карлсона и Л.А. Рубеля.

За время реализации гранта было опубликовано 12 работ в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus, а также 3 учебных пособия.

Выражаю огромную благодарность Фонду за финансовую поддержку, проводимых мной научных исследований.

---

[1] Кривошеева О.А. Область сходимости рядов экспоненциальных мономов. Уфимск. матем. журн. 2011. Т.3, № 2. С. 43-56.